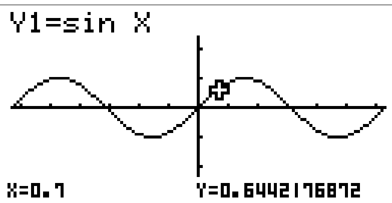
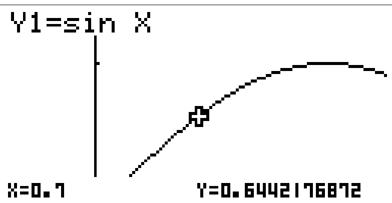
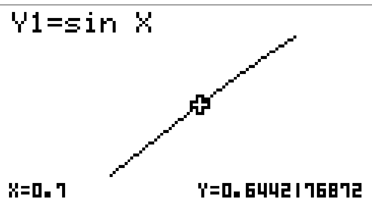
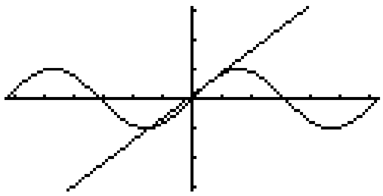
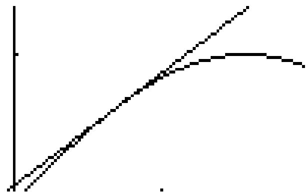
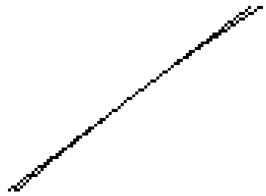
1) Nombre dérivé.

Définition : On considère la courbe représentant une fonction. On zoome fortement sur cette courbe, au voisinage du point d'abscisse $x = x_0$. Si, à force de zoomer, la courbe finit par se confondre avec une droite, on dit que la fonction est dérivable pour $x = x_0$.

La droite observée s'appelle **la tangente** à la courbe de la fonction en $x = x_0$. Le coefficient directeur de cette droite s'appelle **le nombre dérivé** en $x = x_0$. Si la fonction est notée f , le nombre dérivé en $x = x_0$ est noté $f'(x_0)$

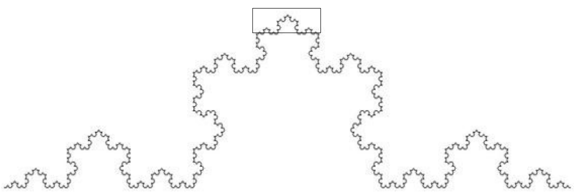
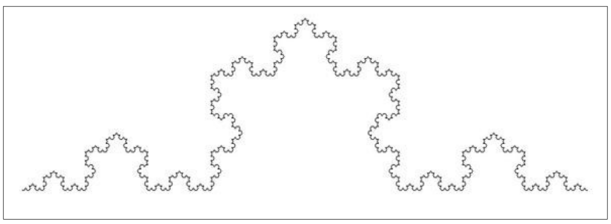
Exemple : La fonction sinus est dérivable pour toute valeur de x , par exemple pour $x = 0,7$:

	Zoom en $x = 0,7$ ...	Nouveau zoom...
		 Le nombre dérivé $f'(0,7)$ est un peu inférieur à 1.

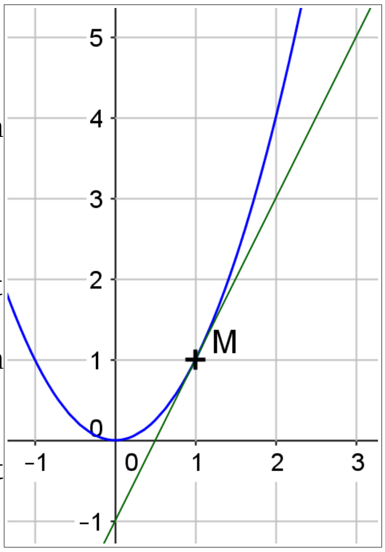
La courbe et sa tangente en $x = 0,7$	Zoom en $x = 0,7$ ...	Nouveau zoom...
		

Remarque : les fonctions utilisées cette années seront toujours dérivables, ou presque. Dans le cas général, il existe énormément de fonctions qui ne sont pas dérivables. Elles sont souvent plus difficiles à étudier.

Exemple : la courbe de Von Koch n'est nulle part dérivable...

Cette courbe est une « fractale ».	Zoom sur la partie encadrée...
	

2) Un exemple de tangente :



On considère une fonction f et sa courbe représentative.
D'après le 1), la tangente à la courbe au point d'abscisse $x=x_0$ est la droite qu'on voit lorsqu'on zoome fortement sur le point de la courbe qui a pour abscisse x_0 .
Sur l'image de droite, on a :
- en bleu, la courbe de la fonction carré définie par $f(x)=x^2$
- le point M de coordonnées (1;1) : c'est le point de la courbe dont l'abscisse est $x=1$ ...
- en vert, la droite qui est tangente à la courbe au point M d'abscisse 1 : si on zoome fortement sur M, la courbe bleue et la droite verte vont se confondre.

Toujours d'après le 1), la pente de la droite verte (c'est à dire son coefficient directeur) est notée $f'(1)$ et est appelée le nombre dérivé de f en $x=1$.

Deux questions :

a) Sur l'exemple de l'image ci-dessus, on a $f'(1)=2$: on peut facilement le lire graphiquement... Mais comment peut-on le ***calculer ??***

b) Toujours sur cet exemple, l'équation de la tangente verte est $y=2x-1$: comment peut-on calculer cette équation ?

Réponse à la question a)

Il faut connaître une formule (dite de « dérivation ») : si $f(x)=x^3$, alors $f'(x_0)=3\times x_0{}^2$. Les formules de dérivation qu'il faut connaître sont rappelées ci-après au 3).

Donc $\boxed{f'(1)=3\times 1^2=3}$. On a bien le résultat annoncé… mais sans connaître la formule, on n'avait aucune chance de le retrouver !

Réponse à la question b)

Plusieurs méthodes sont possibles (vues en 3ème, 2nde ou 1re). En voici une :

L'équation est de la forme $y=mx+p$ (voyez-vous pourquoi?).

m est la pente, c'est donc ici $f'(1)$ c'est à dire 3 : L'équation est donc de la forme : $y=3x+p$. Reste à calculer p.

Pour cela, on utilise le fait que le point M appartient à la droite. On a donc $y_M=3x_M+p$

Soit $1=3\times 1+p$. Donc $p=-2$ (voyez-vous pourquoi?)

Conclusion : l'équation est $\boxed{y=3x-2}$.

Si on n'est pas sûr de son résultat, on peut tracer sur sa calculatrice la courbe et la tangente, pour faire une petite vérification graphique...

3) Calcul des nombres dérivés :

Voici les formules de dérivation qui sont à connaître.

Si $f(x)=k$ (une constante qui ne dépend pas de x),	alors $f'(x_0)=0$ quel que soit x_0
Si $f(x)=mx$	alors $f'(x_0)=m$ quel que soit x_0
Si $f(x)=x^2$	alors $f'(x_0)=2x_0$ quel que soit x_0
Si $f(x)=\sqrt{x}$	alors $f'(x_0)=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$ quel que soit $x_0>0$
Si $f(x)=\dfrac{1}{x}$	alors $f'(x_0)=\dfrac{-1}{x_0{}^2}$ quel que soit $x_0\neq 0$

Remarque : comme x_0 peut prendre n'importe quelle valeur, on le note souvent « x » au lieu de « x_0 » et on dit que $f'(x)$ définit la ***fonction dérivée*** de f .

Propriété 1 : pour dériver une expression qui est la somme de plusieurs sous-expressions, il suffit de dériver chaque terme de la somme.
En d'autre termes :

si $f(x)=u(x)+v(x)$ alors $f'(x_0)=u'(x_0)+v'(x_0)$ quel que soit x_0

Et bien sûr : si $f(x)=u(x)-v(x)$ alors $f'(x_0)=u'(x_0)-v'(x_0)$ (voyez-vous pourquoi cette dernière égalité découle de celle écrite juste au-dessus?)

Propriété 2 : pour dériver une expression qui est multipliée par un nombre, il suffit de dériver l'expression et de multiplier par le nombre.
En d'autre termes :

si $f(x)=\alpha u(x)$ (α est un nombre indépendant de x), alors $f'(x_0)=\alpha u'(x_0)$

Exemple : $f(x)=\sqrt{x}+5x^2+7$
En utilisant les propriétés 1 et 2, ainsi que les formules de dérivation, on obtient :

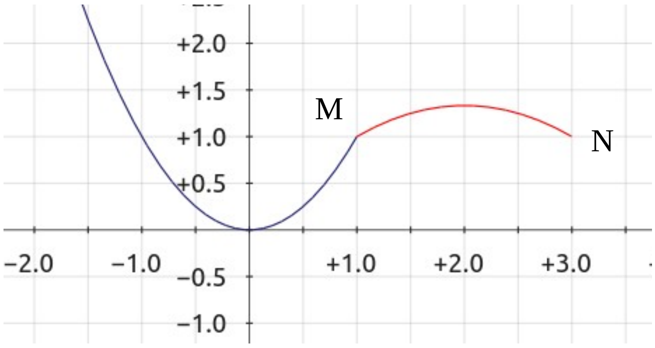
$$f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}+5\times 2x_0+0 \text{ c'est à dire } \boxed{f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}+10x_0}.$$

Voyez-vous où les différentes propriétés ont été utiles ?
La formule encadrée peut servir à calculer la pente de n'importe quelle tangente à la courbe de la fonction f …

4) Raccordement de courbes :

Parfois, on veut que deux parties de courbes se raccordent de façon « lisse » en un point.
« Lisse » signifie que si on zoome fortement sur le point où les deux courbes se raccordent, on ne voit qu'une seule droite.
Donc, techniquement, en utilisant le formalisme de la théorie de la dérivation, cela signifie :
si $f(x)$ et $g(x)$ désignent les deux expressions qui définissent les fonctions correspondant à nos deux courbes, si x_0 est l'abscisse du point où les deux courbes doivent se raccorder, alors on doit avoir $f'(x_0)=g'(x_0)$

Plus simplement : voici à quoi ressemblent deux courbes qui **ne** se raccordent **pas** de façon « lisse » au point M, d'abscisse égale à 1 :

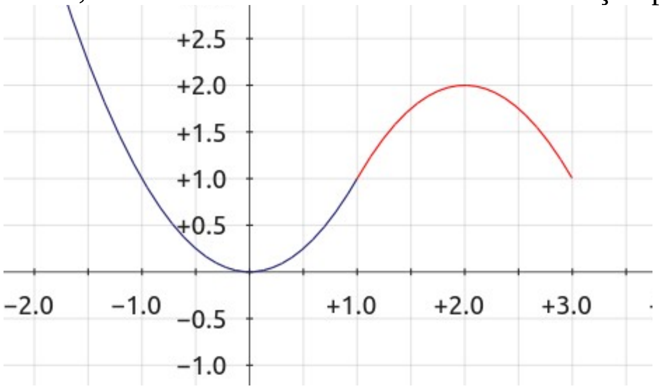


Si on zoome sur le point M, on ne verra pas une seule droite mais deux demi-droites. Cela provient du fait que en M, la fonction de la courbe bleue a une croissance plus forte la fonction de la courbe rouge.
On peut arranger cela en « courbant » d'avantage la partie rouge, de telle sorte que $f'(1)=g'(1)$ (ce qui nous assurera que les deux fonctions croissent de la même façon en $x=1$.)

Voici comment calculer cela :
On n'intervient pas sur la courbe bleue. C'est la courbe de la fonction carré : on part du principe que $f(x)=x^2$.
On suppose que la partie rouge est une parabole, qui passe par les points M et N.
On doit donc avoir : $g(x)=ax^2+bx+c$ pour un certain a , un certain b et un certain c (qu'il faut calculer).
Comme la courbe rouge passe par $M(1;1)$, $g(1)=1$ c'est à dire : $\boxed{a+b+c=1}$.
Comme la courbe rouge passe par $N(3;1)$, $g(3)=1$ c'est à dire : $a\times 3^2+b\times 3+c=1$ soit $\boxed{9a+3b+c=1}$

Enfin, on doit avoir $f'(x_0)=g'(x_0)$ pour $x_0=1$.
Comme $f'(x_0)=2x_0$ et $g'(x_0)=2ax_0+b$, cela donne (pour $x_0=1$): $\boxed{2=2a+b}$

En combinant les 3 équations qui sont encadrées, on peut déterminer les valeurs qu'il faut choisir pour a , b et c . On obtient alors l'image suivante, où les deux courbes se raccordent de façon parfaitement lisse :



Quelles sont les calculs qui permettent de résoudre les trois équations encadrées ci-dessus ? Et quelles valeurs faut-il choisir pour a , b et c ? C'est l'objet du dernier paragraphe :

5) Résolution d'un système de trois équations à trois inconnues :

Il faut résoudre le système suivant (c'est à dire les trois équations encadrées précédemment, **simultanément**) :

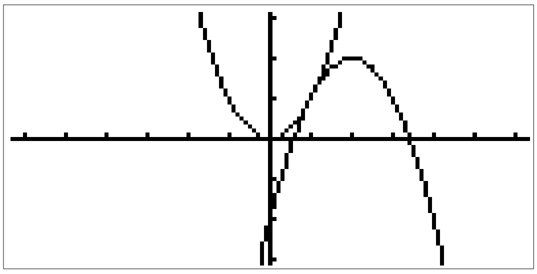
$$\begin{cases} a+b+c &= 1 \\ 9a+3b+c &= 1 \\ 2 &= 2a+b \end{cases}$$

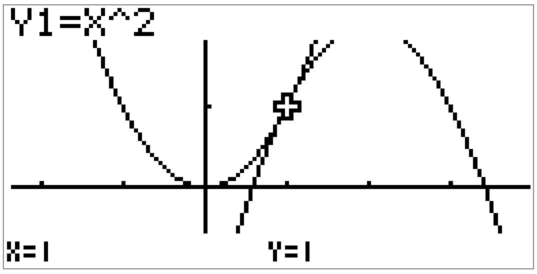
La dernière équation permet d'exprimer b **en fonction de** a : $b=2-2a$
On peut donc **substituer** $2-2a$ à b dans les autres équations (c'est à dire remplacer tous les «b» par des «$(2-2a)$» – notez l'utilisation des parenthèses!)

On obtient : $\begin{cases} a+2-2a+c &= 1 \\ 9a+3(2-2a)+c &= 1 \\ 2 &= 2a+b \end{cases}$ c'est à dire : $\begin{cases} -a+2+c &= 1 \\ 3a+6+c &= 1 \\ b &= 2-2a \end{cases}$ (en développant et réduisant).

De même, la première des trois équations permet maintenant d'exprimer a **en fonction de** c : $a=1+c$
On **substitue** dans la deuxième équation et on obtient :
$\begin{cases} a &= 1+c \\ 3(1+c)+6+c &= 1 \\ b &= 2-2a \end{cases}$ c'est à dire : $\begin{cases} a &= 1+c \\ 9+4c &= 1 \\ b &= 2-2a \end{cases}$

La deuxième équation peut maintenant être résolue : $4c=1-9$ donc $\boxed{c=-2}$
Comme on connaît c , on peut trouver a grâce à la première équation : $\boxed{a=1-2=-1}$
...et finalement b grâce à la troisième équation : $\boxed{b=2-2\times(-1)=4}$
C'est fini !
Conclusion, $g(x)=ax^2+bx+c$ devient avec les trois valeurs calculées : $\boxed{g(x)=-x^2+4x-2}$
Si on trace les courbes correspondant aux fonctions : $f(x)=x^2$ et $g(x)=-x^2+4x-2$, on constate bien qu'elles se raccordent de façon lisse point d'abscisse 1 :





Remarques :
- Il y a de nombreuses méthodes pour résoudre des systèmes de 3 équations à 3 inconnues. Si vous avez un système assez simple, faites vos calculs comme vous voulez, de toute façon vous finirez toujours par trouver la solution !
- Si vous n'osez pas vous lancer ou que vous voulez une méthode « infaillible », retenez que la clé du calcul tel qu'il est montré ci-dessus est : ***exprimer une inconnue en fonction des autres puis substituer ...***